1 Le théorème de la divergence

Dans ce chapitre, nous dériverons les différentes **équations de conservation** qui fournissent la base pour la résolution de problèmes dans les phénomènes de transport. Ces équations sont généralement écrites en notations de calcul multivariable pour le transport dans l'espace tridimensionnel. Ce tutoriel sert de rappel des concepts de calcul multivariable, en particulier le **théorème de la divergence**.

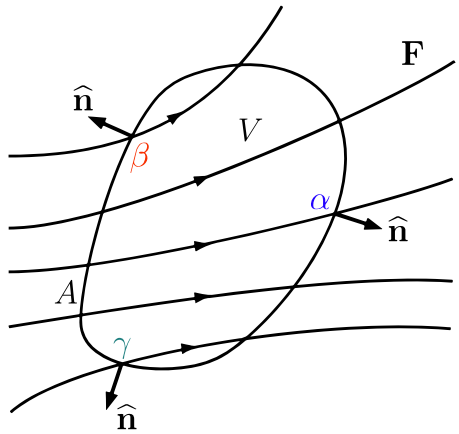

Figure 1: Champ vectoriel dans un volume de contrôle

Dans la figure ci-dessus, $\mathbf{F}$ est un champ vectoriel représenté par un certain nombre de lignes de champ. Nous considérerons un volume de contrôle (VC) dans cet espace avec un volume V et une surface A. En notant la normale unitaire sortante en chaque point de la surface par $\hat{\mathbf{n}}$, le théorème de la divergence s'énonce :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V = \oint_A \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}A.$$

En langage informel, nous pouvons supposer que $\mathbf{F}$ indique le "flux" d'une quantité conservée. Alors, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ en chaque point intérieur de V – une quantité scalaire – donne le taux auquel la quantité conservée "se répand" à partir de ce point, tandis que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}$ en chaque point de la frontière sur A – également une quantité scalaire – donne le taux auquel la quantité conservée "fuit" en ce point.

Selon le théorème de la divergence, il existe deux manières également valables de calculer le taux *total* auquel la quantité conservée quitte le VC : soit en intégrant $\nabla \cdot \mathbf{F}$ en chaque point intérieur sur V, soit en intégrant $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}$ en chaque *point frontière* sur A.

1. En chacun des trois points frontières, α, β, et γ montrés dans la figure ci-dessus, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}$ est
   a. Positif
   b. Négatif
   c. Nul
2. Considérez les affirmations suivantes concernant le théorème de la divergence tel que représenté dans le croquis ci-dessus. Laquelle serait *correcte* dans toutes les circonstances, indépendamment de la façon dont $\mathbf{F}$ est défini ? Sélectionnez *toutes* celles qui s'appliquent.
   a. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$ en chaque point intérieur de V, alors il doit y avoir un flux net sortant de la quantité conservée hors du VC

b. Si la surface A est isolée de telle sorte que $\mathbf{F}$ est tangent à la surface en chaque point frontière, alors nous devons avoir $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ en chaque point intérieur de V
c. Si $\mathbf{F}$ n'est pas différentiable partout dans V, nous pourrions toujours calculer le flux net sortant à partir de $\oint_A \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}A$, si ce dernier est défini

2 Exercices

2.1 Équation de conservation intégrale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V b \, \mathrm{d}V = -\oint_A \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}A + \int_V B_V \, \mathrm{d}V$$

Dans la **forme intégrale de l'équation de conservation générale**, lequel des trois termes représente le taux net d'entrée de la quantité conservée, b, dans le volume de contrôle ?

2.2 Équation de conservation différentielle

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{F} + B_V$$

Quelles sont les unités de la **forme différentielle de l'équation de conservation générale** ?

2.3 Diffusion 1-D

Considérez la **diffusion** unidirectionnelle dans la direction x avec une diffusivité constante, D. Laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. La loi de Fick devient
$$\mathbf{F} = D \frac{\partial c}{\partial x} \hat{\mathbf{x}}$$
b. D a pour unités $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$
c. L'équation de conservation devient
$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

2.4 Équation de conservation pour l'écoulement de fluide

Concernant l'**équation de continuité incompressible** :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_m = 0,$$

laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. C'est un exemple d'une *équation de conservation intégrale*
b. Elle est obtenue en fixant la densité massique, ρ_m, à une constante dans l'*équation de continuité compressible*
c. Elle est dérivée sur la base du principe de conservation de la masse
d. Elle suppose qu'il n'y a pas de production homogène de masse

2.5 Travailler avec des équations de conservation

Pour formuler un problème mathématique significatif, nous devons souvent relier $\mathbf{F}$ et B_V dans les équations de conservation à b (et éventuellement à d'autres variables). Ceci est réalisé en postulant des **relations constitutives** pour $\mathbf{F}$ et B_V. Nous allons maintenant explorer comment cela se fait pour les particules d'une espèce chimique.

Expressions de flux. Il est courant de modéliser la densité de flux d'une espèce par :

$$\mathbf{F} = c\mathbf{v}_{\text{drift}} - D\nabla c \tag{1}$$

qui identifie la **dérive** (ou *drift*, en anglais) et la **diffusion** comme deux mécanismes de mouvement des particules (nous discuterons de leurs origines physiques plus tard).

Le terme de diffusion dans l'expression de flux ci-dessus est appelé **loi de Fick**, et ne nécessite pas de manipulation supplémentaire.

Le terme de dérive, cependant, implique toujours la **vitesse de dérive**, $\mathbf{v}_{\text{drift}}$, qui pourrait être inconnue. Nous pouvons choisir d'imposer simplement un champ de vitesse déterminé par d'autres moyens : par exemple, dans une équation de convection-diffusion, on peut choisir $\mathbf{v}_{\text{drift}} = \mathbf{v}_m$, qui est la vitesse moyennée en masse d'une solution diluée. C'est une bonne approche lorsque $\mathbf{v}_m$ ne dépend pas trop fortement du transport de l'espèce chimique d'intérêt, de sorte qu'elle puisse être déterminée séparément, par exemple, en résolvant un problème de mécanique des fluides.

Un cadre différent consiste à identifier la **force motrice totale** responsable de la dérive observée, et à modéliser la vitesse de dérive par :

$$\mathbf{v}_{\text{drift}} = M\mathbf{f},$$

où M désigne la **mobilité** de l'espèce, et $\mathbf{f}$ est la force motrice subie par chaque particule. Par exemple, si un champ électrique $\mathbf{E}$ provoque la dérive de particules chargées, alors $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$, où q est la charge électrique de chaque particule. L'équation ci-dessus définit la mobilité, et est elle-même une relation constitutive. Nous discuterons de la signification physique de la mobilité plus tard. Pour l'instant, considérez M comme une constante phénoménologique qui donne la vitesse de dérive pour une certaine force motrice.

Lorsqu'il y a plusieurs forces motrices qui contribuent simultanément au transport d'espèces, nous additionnons les $\mathbf{v}_{\text{drift}}$ individuels résultant de chaque force motrice individuelle pour obtenir la vitesse de dérive totale.

Cinétique de réaction. La production volumique d'une espèce chimique est presque certainement due à une **réaction chimique homogène**. Le taux de production volumique, B_V – ou R_V, pour souligner "réaction" – est donné par la **cinétique** de la réaction, et est décrit par une **loi de vitesse**, souvent de la forme :

$$R_V = -k_V c^n,$$

où k_V est appelée la **constante de vitesse**, et n est l'**ordre** de la réaction par rapport à l'espèce d'intérêt, qui agit comme un réactif. Par exemple, pour une réaction qui est de premier ordre par rapport à l'espèce réagissante, nous avons :

$$R_V = -k_V c.$$

Considérez la *mobilité* et la *constante de vitesse de premier ordre* introduites ci-dessus, et identifiez les unités des deux quantités.

2.6 Réaction-diffusion en 2D

Dérivez l'équation de conservation régissant le transport d'une espèce chimique en 2D, où la variable de concentration est notée c. Supposez que tout flux est dû uniquement à la diffusion (*c'est-à-dire*, pas de convection ni de dérive), et que la diffusivité D est constante. Supposez également que l'espèce est consommée par une réaction chimique homogène suivant une cinétique de deuxième ordre avec une constante de vitesse k_V.

2.7 Diffusion et électromigration en 1D

Pour s'exercer à dériver des équations de conservation à partir d'expressions de flux constitutives, considérons le transport d'ions potassium (K^+) dans une solution aqueuse diluée et stagnante de sel. Notons la concentration des ions par c. Le flux de K^+ suit la description générale donnée dans eq. 1. Les ions acquièrent une vitesse de dérive due à la présence d'un champ électrique imposé donné par $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, où ϕ est un champ scalaire appelé le *potentiel électrostatique* (en général, ϕ n'est pas connu a priori et doit être calculé séparément, ce que nous ne considérerons pas dans cet exercice). La dérive due à un champ électrique est appelée *électromigration*, pour contraster avec la *diffusion*, qui est expérimentée par toutes les espèces indépendamment de leurs charges électriques. De plus, rappelez-vous que la charge portée par un ion potassium est égale à e, qui est connue sous le nom de charge élémentaire (1.6×10^{-19} C). Supposez que la mobilité M et la diffusivité D des ions sont constantes.

1. Dérivez une loi constitutive pour la densité de flux de K^+, puis écrivez le résultat pour le transport en 1D le long de la direction x.
2. En utilisant cette relation constitutive, dérivez une EDP régissant le transport des ions potassium dans une solution diluée et stagnante en 1D.

2.8 Conditions aux limites de conservation

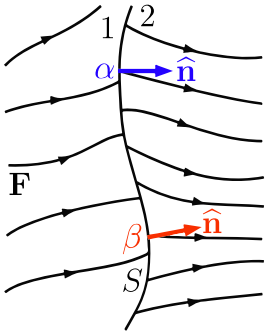

Figure 2: Interface S séparant les régions 1 et 2

Le croquis dans fig. 2 représente une interface S séparant les régions 1 et 2. Laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. La composante normale de $\mathbf{F}$ apparaît continue à travers l'interface.
b. Au point α, nous avons $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}_1 > 0$.
c. Au point β, nous avons $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}_2 > 0$.
d. Parce que les lignes de flux apparaissent beaucoup plus denses dans la région 2 que dans la région 1, il est plausible que $B_S > 0$ en moyenne le long de S.

2.9 Conditions aux limites pour le transfert de chaleur

Considérez la condition aux limites suivante pour la conduction de chaleur dans un objet solide immergé dans un fluide en écoulement :

$$-\hat{\mathbf{n}} \cdot (k\nabla T)|_S = h\,(T - T_\infty)|_S\,,$$

où S représente la surface extérieure de l'objet solide, et T désigne le profil de température dans l'objet.

Laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. Chaque terme de l'équation a les unités $\mathrm{J\,m^{-3}\,s^{-1}}$.
b. Si l'objet entier est plus chaud que le fluide, alors $h\,(T - T_\infty)|_S > 0$ en tout point de S.
c. La condition aux limites implique qu'il n'y a pas de production de chaleur en surface.
d. Tel qu'écrit, la normale unitaire $\hat{\mathbf{n}}$ doit pointer de l'objet solide vers le fluide.

2.10 Interfaces mobiles

Nous pouvons écrire l'équation de conservation générale à une **interface mobile** comme :

$$v_S = \frac{[\![\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}]\!] - B_S}{[\![b]\!]}.$$

Laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. Par définition, $[\![b]\!] = b_2 - b_1$, où 1 et 2 représentent deux régions séparées par l'interface (étant donné que $\hat{\mathbf{n}}$ pointe de la région 1 vers la région 2).
b. Si $B_S = 0$ et les densités de flux normales sont équilibrées des deux côtés de l'interface, en supposant $b_1 \neq b_2$, alors l'interface doit rester stationnaire.
c. Si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ des deux côtés de l'interface, et $B_S < 0$, alors l'interface doit se déplacer vers la région qui est moins riche en b.

2.11 Croissance d'un cristal de glace

Supposons qu'un cristal de glace fini et compact (région 1) soit entouré d'eau liquide (région 2). En maintenant le système près du point de fusion de l'eau, nous faisons croître le cristal de glace en retirant lentement de la chaleur.

Par rapport à un référentiel fixé sur le cristal, laquelle des affirmations suivantes est *incorrecte* ?

a. Puisqu'il n'y a pas d'écoulement à l'intérieur du cristal de glace, $v_1 = 0$.
b. Puisqu'il n'y a pas de génération d'eau à l'interface (la masse est conservée pendant les transformations de phase), $B_S = 0$.
c. Puisque le cristal de glace croît, $v_S > 0$.
d. En reconnaissant que $\rho_2 > \rho_1$ pour l'eau, l'eau liquide doit s'écouler radialement vers l'intérieur pour faciliter la solidification.

2.12 Production surfacique et volumique

Jusqu'à présent, nous avons vu deux types de termes de production dans les énoncés de conservation. Ce sont B_S et B_V, qui désignent respectivement le taux de production par unité de surface sur une surface et par unité de volume dans l'espace.

Pour la conservation de l'énergie thermique, ils sont généralement écrits comme H_S et H_V, correspondant respectivement aux taux de production de chaleur surfacique et volumique.

Pour la conservation d'une espèce chimique, ils sont généralement écrits comme R_S et R_V, ou les taux de production dus aux réactions chimiques hétérogènes et homogènes, respectivement.

Il est crucial de distinguer clairement ces deux types de termes de production lors de la modélisation des phénomènes de transport. Comme B_S se produit dans les bilans interfaciaux, il entre généralement dans un modèle continu via les conditions aux limites. D'autre part, B_V est présent dans l'équation de conservation pour un point intérieur dans le domaine du système, et apparaît ordinairement dans l'EDP gouvernante.

Laquelle des affirmations suivantes est *correcte* ?

a. B_S et B_V ont la même unité.
b. Une espèce est consommée dans toute une solution aqueuse en raison de réactions chimiques. Nous pouvons décrire le taux auquel cela se produit avec un terme R_V, où $R_V > 0$.
c. Un courant électrique continu passe à travers une barre de fer, provoquant le chauffage de la barre. Le taux de chauffage ohmique peut être décrit par un terme H_S, où $H_S > 0$.
d. Une réaction endothermique se produit sur une surface catalytique. La consommation de chaleur associée est donnée par un terme H_S, où $H_S < 0$.

2.13 Température de surface d'une plaque chauffante

Une plaque chauffante a une surface supérieure circulaire d'un diamètre de 20 cm, et produit de la chaleur à un taux global de 800 W. La chaleur est emportée par l'air ambiant à une température constante de 20 °C avec un coefficient de transfert de chaleur constant de $h = 60\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$. Supposons que la plaque chauffante soit suffisamment mince pour que la chaleur ne soit produite qu'à sa surface supérieure, et qu'il y ait une perte de chaleur négligeable de toutes les autres surfaces.

En utilisant l'équation de conservation de l'énergie thermique à une interface, déterminez la température à l'état stationnaire à la surface supérieure de la plaque chauffante.

2.14 Diffusion vers un catalyseur hétérogène

La réaction hétérogène :

$$\mathrm{A} + \mathrm{A} \longrightarrow \text{produits}$$

consomme l'espèce chimique A selon une cinétique du second ordre par rapport à A. En présence d'un catalyseur, la constante de vitesse est donnée par k_S, de sorte que la consommation de A à la surface est $R_S = -k_S \left[c_A(R)\right]^2$. Nous effectuons la réaction dans une solution de A contenant une suspension diluée de particules catalytiques sphériques microscopiques. Supposons que ces particules soient imperméables à A et que chacune ait un rayon de R. Supposons que la solution et les particules soient stagnantes, de sorte que A soit transporté à la surface de chaque particule uniquement par diffusion avec une diffusivité D. En négligeant l'influence des particules voisines, à l'état stationnaire, la concentration de A près de chaque particule catalytique varie uniquement avec la coordonnée radiale r de cette particule, *c'est-à-dire*, $c_A = c_A(r)$, avec $r = 0$ coïncidant avec le centre de la sphère.

La résolution de $c_A(r)$ dans la région à l'extérieur d'une particule catalytique ($r \geq R$) nécessiterait une condition aux limites à la surface de la particule, $r = R$.

Déterminez cette condition aux limites basée sur un bilan interfacial et complétez l'équation ci-dessous, où c_A et ses dérivées doivent être évaluées à $r = R$.

2.15 Bougie qui brûle

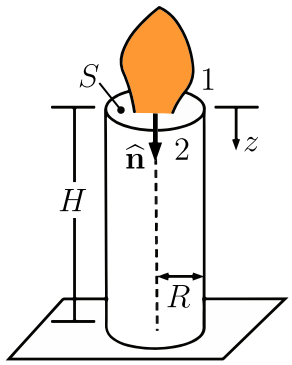

Figure 3: Paramétrage de la géométrie de la bougie qui brûle

Considérez la bougie qui brûle représentée dans fig. 3. Supposons que la réaction de combustion brûle la cire de la surface supérieure à un taux constant par unité de surface de l'interface S, donné par $R_S < 0$, qui a pour unités $\mathrm{mol\,m^{-2}\,s^{-1}}$. La bougie a la forme d'un cylindre, dont la hauteur et le rayon sont donnés par H et R. Supposons que la densité et la masse molaire moyenne de la cire soient données par ρ et M, qui ont pour unités $\mathrm{kg\,m^{-3}}$ et $\mathrm{kg\,mol^{-1}}$, respectivement.

Nous pouvons utiliser l'équation de conservation des espèces à une interface mobile pour trouver le temps nécessaire pour que la bougie se consume entièrement, t_b, comme suit :

$$v_S = \frac{[\![\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}]\!] - R_S}{[\![c]\!]} = \frac{(0-0) - R_S}{c_2 - 0} = \frac{-R_S}{\rho/M}$$

ce qui donne

$$t_b = \frac{H}{v_S} = -\frac{\rho H}{M R_S}.$$

Lesquelles des affirmations suivantes concernant le calcul ci-dessus sont *correctes* ? Sélectionnez *toutes* celles qui s'appliquent.

a. $R_S < 0$ car la cire est *consommée* par la réaction chimique à l'interface S.
b. $v_S < 0$ car l'interface S se déplace vers le bas au fur et à mesure que la bougie brûle.
c. $\pi R^2 H c_2$ est égal au nombre total de moles de cire initialement contenues dans la bougie.
d. Selon notre calcul, il faudrait plus de temps pour qu'une bougie plus épaisse se consume entièrement.
e. Si une partie de la cire pouvait se diffuser dans l'air sous forme de vapeur sans subir de réactions, alors nous aurions $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}_1 > 0$.

2.16 Conservation de l'énergie thermique à une interface solide-liquide

Une plaque métallique de longueur L est enfermée dans un conteneur rigide orienté dans la direction x. Les températures à $x = 0$ et $x = L$ sont fixées à T_1 et T_2, respectivement, telles que $T_1 < T^* < T_2$, où T^* est le point de fusion du métal. À $x = x_S$, une interface plane divise la plaque en une région solide (à sa gauche) et une région liquide (à sa droite), qui peut se déplacer uniformément au fil du temps jusqu'à ce qu'elle atteigne une position stable $x = x_{S0}$. Il est intéressant de prédire la vitesse instantanée de l'interface solide-liquide en considérant un bilan énergétique à l'interface mobile. Nous faisons les hypothèses suivantes :

- Nous avons $T = T^*$ à $x = x_S$ dans les deux phases, ce qui est nécessaire pour l'équilibre thermodynamique de phase à l'interface ;
- Le profil de température est linéaire avec la position dans chaque phase à tout moment (ce qui découle de l'approximation pseudo-stationnaire qui sera discutée plus tard) ;
- Les densités des deux phases sont suffisamment similaires pour que le mouvement de l'interface ne génère pas d'écoulement dans l'une ou l'autre phase, de sorte que le transfert de chaleur se produit uniquement par conduction (ce qui, en fait, découle d'un bilan de masse interfacial).

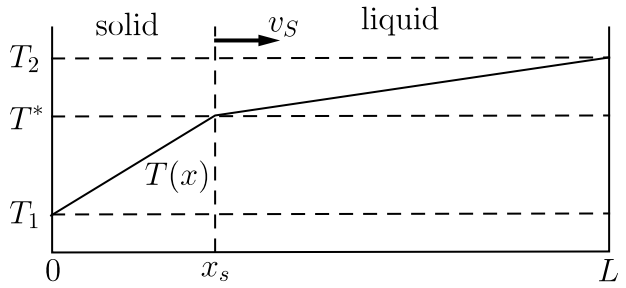

Figure 4: Profil de température

Sous ces hypothèses, le profil de température peut ressembler à ce qui est montré dans fig. 4, où $T(x)$ est linéaire par morceaux. Supposons que la conduction thermique dans chaque phase suive la *loi de Fourier*, et que la différence de *densité d'enthalpie*, H, entre le liquide et le solide à T^* soit donnée par l' "enthalpie de fusion" du métal, $\Delta_{\text{fus}}H$, qui a pour unités $\mathrm{J\,m^{-3}}$ – c'est-à-dire que l' "énergie thermique" contenue dans un volume unitaire du métal liquide au point de fusion est supérieure à celle du solide correspondant à la même température de $\Delta_{\text{fus}}H$.

En désignant les côtés solide et liquide de l'interface par 1 et 2, dérivez une expression pour v_S, ou la vitesse instantanée de l'interface solide-liquide dans la direction x (notez que $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$), en termes des quantités physiques pertinentes. Vous devriez commencer par écrire l'équation de conservation de l'énergie thermique à l'interface mobile.

Selon votre formule et/ou votre intuition physique, laquelle des prédictions suivantes est *correcte* ? Le cas échéant, supposez que les conditions non mentionnées restent inchangées.

a. Si l'interface était plus proche du côté droit de la plaque, alors v_S serait plus positif (ou moins négatif).
b. Si le liquide était plus conducteur thermiquement, alors v_S serait plus positif (ou moins négatif).
c. Si $\Delta_{\text{fus}}H$ était plus grand, alors v_S serait plus grand en magnitude.
d. La position d'équilibre de l'interface, x_{S0}, satisfait l'équation suivante

$$k_1 \frac{T^* - T_1}{x_{S0}} = k_2 \frac{T_2 - T^*}{L - x_{S0}}$$

3 Problèmes

3.1 Dynamique des glaciers

Un glacier peut être modélisé comme un fluide visqueux s'écoulant très lentement dans une vallée. Dans ce problème, nous considérerons un modèle 1-D pour la hauteur $h(x,t)$ d'un glacier dans une vallée large à fond plat, comme illustré dans fig. 5.

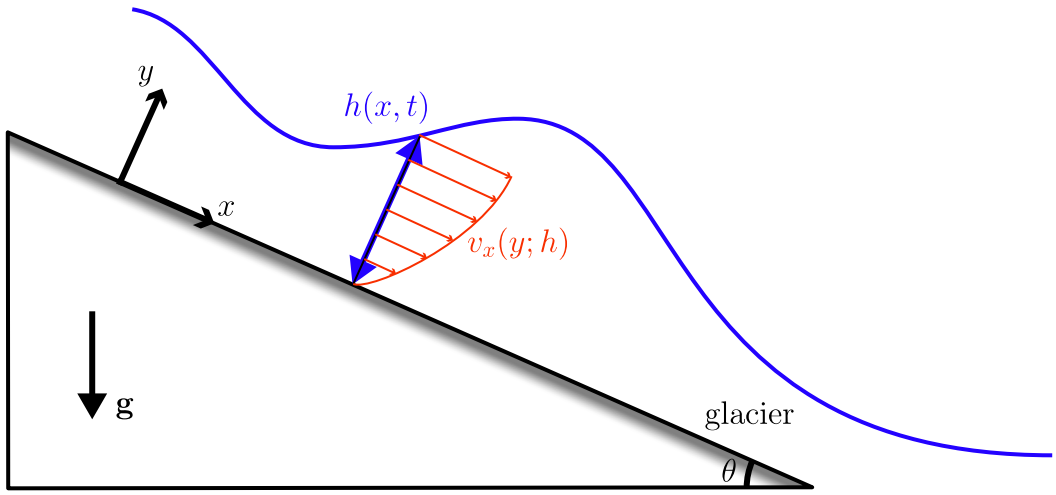

Figure 5: Glacier dans une vallée large à fond plat

Sous l'hypothèse de "lubrification", le profil de vitesse à travers la profondeur du glacier $v_x(y;h)$ suit l'équation différentielle ordinaire suivante,

$$-\nu \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2} = g \sin\theta,$$

et les conditions aux limites,

$$v_x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}(h) = 0,$$

où ν est la viscosité cinématique effective de la glace du glacier (avec des unités de $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$), g est la magnitude de l'accélération gravitationnelle, et θ est l'angle d'inclinaison du fond de la vallée.

1. Résolvez pour $v_x(y;h)$ en termes de la variable indépendante y ainsi que des paramètres h, ν, g et θ.
2. En utilisant l'expression de $v_x(y;h)$ calculée précédemment, calculez la vitesse moyenne $\overline{v_x}(h)$ à travers la profondeur du glacier. Exprimez votre réponse en termes de h, ν, g et θ.
3. En utilisant l'expression de $\overline{v_x}(y;h)$, dérivez une équation aux dérivées partielles pour $h(x,t)$ basée sur la **conservation de masse différentielle**. Supposez une production de hauteur donnée par unité de surface de vallée, $p(t)$ (par exemple, due aux chutes de neige nettes, à la fonte, au compactage, etc.), qui a des unités de longueur par temps. Exprimez l'EDP en termes des variables h, x et t, ainsi que des paramètres constants ν, g et θ. Assurez-vous que h est la variable dépendante dans chaque dérivée partielle de l'EDP.

Si nous écrivons l'EDP précédemment dérivée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v(h)\frac{\partial h}{\partial x} = p,$$

nous trouvons que $\mathrm{d}v/\mathrm{d}h > 0$. C'est-à-dire que la "vitesse caractéristique" $v(h)$ augmente avec la hauteur du glacier. Cela fait que toute fluctuation de la hauteur du glacier conduit à une "onde de rupture" qui forme un front raide, ce qui est couramment observé pour les glaciers, comme montré dans fig. 6.

4. Déterminez la vitesse du front du glacier, v_f, dans la limite d'une "interface" mobile nette – c'est-à-dire, supposez que la hauteur du glacier immédiatement devant et derrière le front soit respectivement h_0 et h_f.

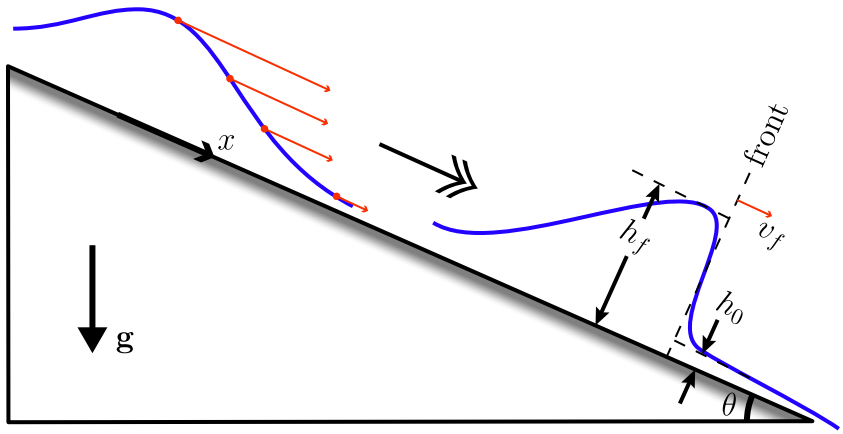

Figure 6: Rupture du glacier dans une vallée large à fond plat

5. Le résultat précédent prédit $v_f > 0$ pour $\theta > 0$, *c'est-à-dire* qu'un front de glacier net se déplacera toujours vers le bas d'une vallée, et pourtant nous savons que certains fronts de glacier reculent (comme nous le voyons dans les films). Quelle est la résolution de ce paradoxe ? Comment serait-il possible qu'un front de glacier net avance en montée ? Sélectionnez parmi les options ci-dessous une explication qui est non seulement mathématiquement correcte, mais aussi physiquement sensée.

   a. Si le glacier est plus haut devant que derrière le front, ou $h_0 > h_f$, alors le front avancerait en montée.
   b. Si le glacier se déplace plus lentement lorsqu'il est plus haut, ou $\mathrm{d}v/\mathrm{d}h < 0$, alors il est possible que le front avance en montée.
   c. Si la glace glaciaire est consommée nette *partout*, ou $p < 0$, alors le front avancerait en montée.
   d. Si la glace glaciaire est consommée nette *à l'interface*, ou $B_S < 0$, alors le front avancerait en montée.

3.2 Électrodéposition dendritique

Un dépôt de cuivre métallique poreux (Cu) de "dendrites" en forme de doigts est cultivé par électrodéposition à partir d'une solution de cations de cuivre (Cu^{2+}) à un courant électrique constant, qui est proportionnel à la magnitude de la densité de flux diffusif, F_0, à la pointe des dendrites. Comme montré dans l'image expérimentale de l'électrodéposition du cuivre à partir d'une solution de $CuSO_4$ (fig. 7), l'interface approximativement plane séparant le dépôt et la solution est située à $x = x_S(t)$, qui se déplace à une vitesse constante $v_S\hat{\mathbf{x}}$. Le profil de concentration de Cu^{2+} en avant de la croissance, $c(x,t)$ pour $x > x_S$, est approximativement 1-D et stable dans le référentiel se déplaçant avec l'interface (notez les caractéristiques du profil $c(x,t)$ montrées dans fig. 7). Supposez que toute solution piégée dans le dépôt métallique ne contient plus de cations Cu^{2+}, *c'est-à-dire* que tout le cuivre dans la région $x < x_S$ est sous forme de cuivre métallique (Cu).

Supposons que nous traitions à la fois Cu et Cu^{2+} comme une seule espèce, que nous appelons simplement "cuivre" (ou plus précisément les noyaux atomiques du cuivre). Considérez la dérivation suivante basée sur l'équation de conservation du cuivre à l'interface mobile dépôt-solution :

$$v_s = \frac{[\![\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}]\!] - R_S}{[\![c]\!]} = \frac{[\![\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}]\!] - 0}{[\![c]\!]} = \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot (-F_0\hat{\mathbf{x}}) - 0}{0 - c_d} = \frac{F_0}{c_d}.$$

1. Lesquelles des affirmations suivantes concernant la dérivation ci-dessus sont *correctes* ? Sélectionnez

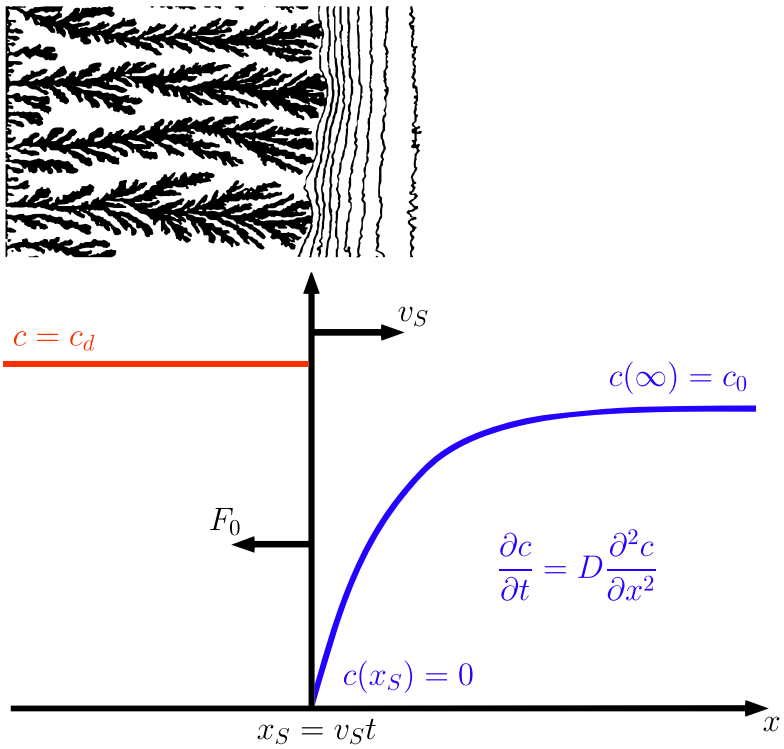

Figure 7: Électrodéposition du cuivre

toutes celles qui s'appliquent.

a. Puisque nous avons choisi $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ comme normale unitaire de l'interface, $v_S > 0$ impliquerait que l'interface se déplace vers la droite.
b. $R_S = 0$ car les noyaux de cuivre ne sont ni produits ni consommés à l'interface.
c. $-F_0\hat{\mathbf{x}}$ est la densité de flux de cuivre du côté du dépôt (côté gauche) de l'interface mobile.
d. c_d est la concentration de cuivre du côté du dépôt (côté gauche) de l'interface.

La concentration de cuivre dans la solution, $c(x,t)$ pour $x > x_S$, est régie par l'**équation de diffusion** :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

Nous pouvons transformer cette EDP pour $c(x,t)$ en une EDO pour $f(\xi)$ en utilisant les substitutions de variables suivantes :

$$c(x,t) = c_0 f(\xi),$$

et

$$\xi = x - v_S t.$$

2. Déterminez l'EDO en termes des variables f et ξ, ainsi que des paramètres constants v_S et D.
3. Réécrivez les conditions aux limites pour $c(x,t)$ pour $x > x_S$ dans le problème original comme conditions aux limites pour $f(\xi)$.
4. Dérivez la solution pour $f(\xi)$ en utilisant l'EDO et les CL déterminées ci-dessus en termes de ξ, c_0, v_S et D.
5. Sur la base de la solution pour $f(\xi)$, déterminez F_0, la magnitude de la densité de flux diffusif de Cu^{2+} du côté de la solution de l'interface à $x = x_S$. Exprimez votre réponse en termes de c_0 et v_S.
6. En utilisant les deux expressions impliquant v_S précédemment dérivées, exprimez c_d en termes d'autres quantités connues. Par la suite, dérivez une formule pour la porosité ϕ du dépôt dendritique, définie comme la fraction volumique du dépôt qui n'est *pas* occupée par le cuivre métallique. La masse molaire et la densité massique du cuivre métallique (Cu) sont notées M et ρ. Exprimez votre réponse en termes de c_0, v_S, D, M et ρ.